

Multi Criteria Decision Aid

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

2018/2019 - INPT

Introduction

- ✓ Le besoin d'aller au delà de la simple prise en compte de données "objective" en intégrant les aspects subjectifs dans un processus de décision
- ✓ Lorsque les données sont homogènes, il est aisé de les regrouper et de les synthétiser dans un résultat d'évaluation. Ce n'est pas le cas lorsque les données sont hétérogènes, partiellement contradictoires et mal appréhendées.
Document not to be used for teaching, All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- ✓ L'analyse Multicritère de l'aide à la décision apporte des éléments de réponse.
- ✓ Elle consiste à la définition et l'étude approfondie de critères supposés refléter les différents points de vue entrant en considération dans un processus de décision.

Introduction

- ✓ Les problèmes de choix ou de rangement figurent parmi les premiers problèmes d'aide à la décision multicritère.
- ✓ Le problème de classification consiste à affecter des objets, des candidats, des actions potentielles à des catégories ou des classes prédéfinies.

document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- ✓ Exemple:
 - Evaluation des dossiers de crédits
 - Diagnostic médical
 - Evaluation environnemental
 - Reconnaissance de la parole
 - Etc ...

Différence entre sciences de décision et AD

- ✓ Les sciences de décision ont pour objectif de trouver une décision optimale à partir d'une vision supposée objective de la réalité.
- ✓ Les sciences de décision supposent:
 - l'existence d'une meilleure solution.
 - l'obtention de ladite meilleure solution est obtenue en minimisant un critère
 - l'obtention de ladite solution est réalisée quelque soit la méthode utilisée.
- ✓ L'AD est une discipline qui s'intéresse à la construction de décisions satisfaisantes en considérant toute la dimension subjective d'un processus de décision. Elle ne repose pas sur l'existence d'une vérité absolue et elle ne cherche pas à trouver une solution optimale mais à accompagner le décideur.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author. Dr. Mohamed ASSEL AOU

Notions de décideur et l'homme chargée de l'AD

- ★ Le décideur est l'entité intervenant dans le processus de décision. C'est l'entité au compte de qui, l'aide à la décision s'exerce. Il peut être un individu ou un gouvernement.
Document not to be used for copying. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- ★ La personne chargée de l'AD met en oeuvre les modèles dans le cadre d'un processus de décision. Il contribue à l'orienter et à la transformer.

Modélisation de préférences

Action potentielle

L'action est l'objet à manipuler par la personne chargée de l'aide à la décision. On note A l'ensemble des actions.

- Construire une usine: actions: les différents lieux envisagés.
- Voyageur de commerce: actions: ensemble de tournées possibles pour le voyageur.
- Domaine bancaire: actions: produits financiers adaptés au profil de chaque client.

L'action potentielle peut être fictive!!

Préférence et Indifférence

- L'activité d'aide à la décision passe par la comparaison des actions entre elles.
- La préférence est une relation qui traduit une situation dans laquelle il existe des raisons pour lesquelles on peut mettre en évidence une préférence entre a et b . On notera $(a P b)$.
- L'indifférence est une relation qui traduit une situation dans laquelle il n'existe pas de raisons suffisamment fortes pour confirmer une relation de préférence. On notera $(a I b)$.

$$a I b \Leftrightarrow \overline{(a P b) \vee (b P a)}$$

Intransitivité de l'indifférence et de la préférence

- **Exemple 1:** Intransitivité de l'indifférence; Poincaré constate qu'un poids a de masse 10 grammes ne peut être distingué d'un poids b de masse 11 grammes. Par ailleurs b ne peut être distingué d'un autre poids c de masse 12 grammes. Cependant, il est assez facile de distinguer a de c. Ainsi en considérant un système de préférence où l'on recherche des poids plus légers, on a les trois relations suivantes :

$$a \sim b$$

$$b \sim c$$

$$a \prec c$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Exemple 2:** Intransitivité de la préférence: Effet de Condorcet: Considérons trois actions a,b,c jugés par trois points de vue. Une action est préférée à une autre si elle est meilleure sur la majorité des points de vue considérés.

| points de vue | 1 | 2 | 3 |
|---------------|----|----|----|
| a | 15 | 15 | 5 |
| b | 10 | 10 | 10 |
| c | 5 | 17 | 7 |

Incomparabilité

- Il n'y a pas que la préférence et l'indifférence pour exprimer les relations dans le domaine de l'aide à la décision.
- Par exemple, le choix du meilleur fournisseur ou le meilleur produit n'est pas toujours évident et les relations ne sont pas de type préférence ou indifférence;
- L'incomparabilité est une situation dans laquelle les informations sur les actions ne sont pas suffisantes pour trancher entre préférence et indifférence.
- On notera R la relation d'incomparabilité, i.e, $a R b$ signifiera que a est incomparable à b . **Exemple:** Choix entre plusieurs appareils aéronautiques.

| Appareil | M(kg) | Capacité (per) | C.U(kg) | V.M(km.h ⁻¹) | Autonomie |
|----------|-------|----------------|---------|--------------------------|-----------|
| App 1 | 9570 | 2+29 | 6300 | 273 | 1180 |
| App 2 | 9000 | 2+21 | 4480 | 251 | 911 |
| App 3 | 5925 | 1+1 | 1800 | 280 | 800 |

Surclassement

- On peut considérer également une autre situation qui correspond à un regroupement des relations de préférence et de l'indifférence.
- Soient deux actions a et b , $a S b$ signifie que a est au moins aussi bon que b .

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\begin{aligned}
 a S b &\Leftrightarrow (a I b) \vee (a P b) \\
 (a S b) \wedge (b S a) &\Leftrightarrow a I b \\
 (a S b) \wedge \overline{(b S a)} &\Leftrightarrow (a P b) \\
 \overline{(a S b)} \wedge \overline{(b S a)} &\Leftrightarrow (a R b)
 \end{aligned}$$

Analyse multicritère

- Notion de critère: il est le moyen utilisé pour décrire les actions ou modéliser un point de vue. Formellement, on représentera les critères par des fonctions à valeurs réelles.
- Un critère est une fonction g , définie sur l'ensemble A des actions, qui prend ses valeurs dans un ensemble totalement ordonné, et qui représente les préférences du décideur selon un point de vue.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- Plusieurs aspects d'une action peuvent concourir à un même point de vue. **Exemple:** Pour le point de vue confort d'une automobile, plusieurs aspects doivent être pris en compte comme la suspension, la tenue de route, le niveau sonore, etc..
- Chaque action $\{a \in A\}$ sera représentée dans l'espace des critères $E = E_1 \times \dots \times E_n$, par un vecteur de performance $(g_1(a), \dots, g_n(a))$ où g_i représentent les critères.

Famille des critères

- La famille des critères $F = \{g_1, \dots, g_n\}$ doit représenter d'une façon adéquate les points de vue à prendre en compte dans la modélisation des préférences.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Les propriétés d'une famille de critère sont:
 - 1 Exhaustivité
 - 2 Cohésion
 - 3 Non redondance

Exhaustivité

- Une famille F des critères est dite exhaustive si elle permet de couvrir tous les aspects qui contribue à l'évaluation des actions.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Soient a et b dans A tels que $a \succ b$, alors il n'est pas possible d'avoir des arguments pour une préférence entre a et b .
- Si $a \sim b$, alors il n'est pas possible d'avoir des arguments pour une indifférence entre a et b .

Cohésion

- La cohésion concerne les évaluations critère par critère et les évaluations d'ensemble.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Soient a et b dans A tels que $a \succ b$ alors si on dégrade l'action a sur un critère pour obtenir une action a' et on améliore b pour obtenir une action b' alors b' est au moins aussi bonne que a' .

Non redondance

- La non redondance de signifie qu'il n'existe pas de critères superflus au sein de la famille F .

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Un critère est dit non redondant lorsque sa suppression engendre le non respect par F des propriétés d'exhaustivité et de cohésion.

Types de problèmes d'aide à la décision

- La première étape du processus d'aide à la décision va consister à définir vers quoi la prescription de l'homme d'étude au décideur va s'orienter.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- Quatre types de problématiques de référence , le choix, le tri, le rangement et la description, respectivement notées,
P.α. P.β, P.γ, P.σ.

Problématique du choix

- Elle consiste à sélectionner un sous-ensemble aussi restreint que possible d'actions A d'un ensemble A qui justifie de l'élimination des autres actions.
- Cette problématique généralise la problématique de la recherche opérationnelle. Elle aboutit à la mise au point d'une procédure de sélection.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Problématique du tri

- Consiste à affecter les actions de A à des catégories ou des classes prédéfinies.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- On ne compare pas les actions de A entre elles mais plutôt les actions de A avec des actions de référence. On parle de procédure d'affectation à des catégories.

Problématique du rangement

- Consiste à ordonner les actions de A. Cependant, on ne recherche pas nécessairement un ordre complet sur les actions au sens d'une relation de préférence globale ;
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- On cherche plutôt à regrouper les actions en classes d'équivalence, celles-ci étant totalement ou partiellement ordonnées. La procédure recherchée est une procédure de classement.

Problématique du description

- Cette problématique fait généralement partie de la première phase d'analyse des problématiques précédentes.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Consiste juste à éclairer l'analyse des actions en aidant le décideur à appréhender celles-ci. Cela passe par la définition des conséquences élémentaires et des critères, ainsi que par le choix ultérieur d'une autre problématique

Etapes de Processus de décision multicritère

- Structurer la situation de décision: critères, alternatives et choix ;
- Articuler et modéliser des préférences au niveau de chaque point de vue;
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- Agrégation de ces préférences locales en vue d'établir un ou plusieurs systèmes relationnels de préférences globaux.;
- Exploiter cette agrégation.

Structuration de la situation de la décision

- 1 Déterminer le type de problématique à résoudre : problématique de choix, problématique de tri, problématique de rangement ou problématique de description.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- 2 Déterminer l'ensemble des actions à étudier.
- 3 Recenser les critères selon lesquels les actions seront évaluées.
- 4 Déterminer les évaluations de chacune des actions sur chacun des critères.

Articulation et modélisation des préférences

- 1 Définir les types de critères : vrai critère, pseudo critère...
- 2 Définir l'ordre d'importance des critères ainsi que leur poids si besoin est.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- 3 Définir, et ce selon la méthode d'agrégation retenue, les fonctions d'utilité partielle, les fonctions de valeur, les comparaisons par paires d'actions. . .

Agrégation des préférences et Exploitation

- L'agrégation des préférences locales consiste à exploiter les évaluations partielles des actions sur les différents critères afin de générer une évaluation globale.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- L'exploitation consiste à exploiter les résultats obtenus à l'étape d'agrégation des préférences locales pour choisir, ranger ou trier les actions.

Tableau de préférence

Après avoir défini les critères et les alternatives, un tableau de performances permet de donner une vue d'ensemble à travers la présentation des résultats de cette évaluation sur chaque critère.

| | | Critères | | | | | |
|--|-------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|
| Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI. | | | | | | | |
| Alternatives | | $C_1()$ | $C_2()$ | ... | $C_j()$ | ... | $C_n()$ |
| | a_1 | e_{11} | e_{12} | ... | e_{1j} | ... | e_{1n} |
| | a_2 | e_{21} | e_{22} | ... | e_{2j} | ... | e_{2n} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_i | e_{i1} | e_{i2} | ... | e_{ij} | ... | e_{in} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_m | e_{m1} | e_{m2} | ... | e_{mj} | ... | e_{mn} |

On note $E = \{e_{ij}\}_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$

Approches de résolution d'un problème d'MCDA

- 1 **Approche du critère unique de synthèse.** Ces approches sont exploitées dans le cas où le décideur est capable de juger toute paire d'actions (a, b) .

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- 2 **Approche du surclassement de synthèse.** Ces approches permettent l'incomparabilité entre actions.
- 3 **Approche du jugement local interactif.** Ces approches sont caractérisées par une interaction continue entre l'homme d'étude et le décideur tout au long du processus d'aide à la décision.

Approche de critère unique de synthèse

- **Technique for Order of Preference by Similarity to Ideal Solution(TOPSIS):**
Cette méthode consiste à choisir une solution qui se rapproche le plus de la solution meilleure sur tous les critères et de s'éloigner le plus possible de la solution qui dégrade tous les critères.
- **Simple Multi-Attribute Rating Technique (SMART)** consiste à utiliser la forme additive pour l'agrégation des évaluations sur les différents critères.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- **Multi Attribute Value Theory (MAVT):** L'idée est que tout décideur essaie inconsciemment (ou implicitement) de maximiser une fonction $V = V[g_1, \dots, g_n]$ qui agrège tous les critères. La particularité de la méthode MAVT réside dans l'idée de construction d'une fonction de valeur partielle pour chaque attribut.
- **Multi Attribute Utility Theory (MAUT):** repose sur la même idée que la méthode MAVT. En revanche, elle s'applique dans le cas où les évaluations des actions par rapport aux attributs sont imprégnées d'incertitude (aléatoire). A ce moment, on parle de fonction d'utilité et non plus de fonction de valeur.

Etapes de la méthode TOPSIS

Soient

$$\begin{aligned} E &= \{e_{ij}\}_{i \leq m, j \leq n} \\ W &= \{w_k\}_{k \leq n} \end{aligned}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

respectivement une matrice des performances et un vecteur des coefficients d'importances de critère. Les étapes de la méthode TOPSIS sont:

- **Etape 1:** Construire la matrice des performances normalisées:

$$\bar{E} = \left[\bar{e}_{ij} = \frac{e_{ij}}{\sqrt{\sum_{k=1}^m [e_{kj}]^2}} \right]_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$$

Etapes de la méthode TOPSIS

- **Etape 2:** Construire la matrice des performances pondérées:

$$\tilde{E} = \left[\tilde{e}_{ij} = \bar{e}_{ij} * w_j \right]_{i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Etape 3:** Déterminer le pire profil v_* et le profil idéal v^* :

$$v_* = \left[v_{j*} = \min_{i \in \{1, \dots, m\}} \tilde{e}_{ij} \right]_{j \in \{1, \dots, n\}}$$
$$v^* = \left[v_j^* = \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \tilde{e}_{ij} \right]_{j \in \{1, \dots, n\}}$$

Etapes de la méthode TOPSIS

- **Etape 4:** Calculer les distances euclidiennes par rapport aux profils v^* et v_* :

$$D_* = \left[D_{i*} = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\tilde{e}_{ij} - v_{j*})^2} \right]_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

$$D^* = \left[D_i^* = \sqrt{\sum_{j=1}^n (\tilde{e}_{ij} - v_j^*)^2} \right]_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Etape 5:** Calculer le vecteur des coefficients de mesure du rapprochement au profil idéal:

$$R = \left[R_i^* = \frac{D_{i*}}{D_i^* + D_{i*}} \right]_{i \in \{1, \dots, m\}}$$

- **Etape 6:** Ranger les actions en fonction des valeurs décroissantes des éléments de R .

Exemple d'application 1

Une entreprise cherche à sous traitant pour son produit. Le directeur opte pour les critères suivant avec leur coefficient d'importance:

| Critère de sélection | Sens d'optimisation | Coefficient d'importance |
|----------------------|---------------------|--------------------------|
| Fiabilité (C1) | Maximiser | 45% |
| Autofinancement (C2) | Maximiser | 35% |
| Coût du contrat (C3) | Minimiser | 20% |

Le directeur a reçu quatre offres:

| Sous-traitant | Fiabilité (C1) | Autofinancement (C2) | Coût du contrat (C3) |
|---------------|----------------|----------------------|----------------------|
| a1 | 78% | 94% | 10 000 |
| a2 | 82% | 86% | 15 000 |
| a3 | 80% | 75% | 22 000 |
| a4 | 88% | 90% | 25 000 |

Solution de l'exemple d'application 1

- **Etape 1:** La matrice des performances normalisées:

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} 0.4751 & 0.5431 & 0.2641 \\ 0.4995 & 0.4969 & 0.3961 \\ 0.4873 & 0.4333 & 0.5810 \\ 0.5360 & 0.5200 & 0.6602 \end{bmatrix}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELI/AAOU.

- **Etape 2:** La matrice des performances pondérées:

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} 0.2138 & 0.1901 & 0.0528 \\ 0.2248 & 0.1739 & 0.0792 \\ 0.2193 & 0.1517 & 0.1162 \\ 0.2412 & 0.1820 & 0.1320 \end{bmatrix}$$

Solution de l'exemple d'application

- **Etape 3:** Pire profil et profil idéal:

$$v^* = \begin{bmatrix} 0.2412 & 0.1901 & 0.0528 \end{bmatrix}$$

$$v_* = \begin{bmatrix} 0.2138 & 0.1517 & 0.1320 \end{bmatrix}$$

- **Etape 4:** Vecteur des distances euclidiennes par rapport au pire profil et profil idéal:

$$D^* = \begin{bmatrix} 0.0274 & 0.0350 & 0.0773 & 0.0796 \end{bmatrix}$$

$$D_* = \begin{bmatrix} 0.0880 & 0.0583 & 0.0168 & 0.0409 \end{bmatrix}$$

- **Etape 5:** Vecteur des coefficients de mesure de rapprochement au profil idéal:

$$R = \begin{bmatrix} 0.7626 & 0.6246 & 0.1783 & 0.3392 \end{bmatrix}$$

- **Etape 6:** Sera sélectionner le sous traitant 1 puis 2 puis 4 puis 3.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Implémentation de la méthode TOPSIS sur Python

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Evaluation de la méthode TOPSIS

Avantages:

- La méthode TOPSIS peut évaluer un grand nombre d'alternatives et même de critères.
- Le changement d'un critère peut être compensé par les autres critères (TOPSIS permet une interaction entre les critères)
- Elle donne un classement préférentiel des alternatives avec une valeur numérique pour mieux comprendre les différences et les indifférences
- Très simple à implémenter

limites: Le grand inconvénient de la méthode TOPSIS c'est qu'elle considère un vecteur de poids sur les critères ainsi que les préférences qui doivent être fixées au départ.

Domaines d'application de TOPSIS

- Le management de la chaine d'approvisionnement et la logistique
- Ingénierie et système de production
- Business et le marketing
- Management des ressources humaines
- Sécurité et environnement

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Méthode MAVT

- **Etape 1** : Construire la matrice de décision:

| | Critères | | | | | |
|--------------|----------|---------------|-----|---------------|-----|---------------|
| | | $C_1()$ | ... | $C_j()$ | ... | $C_n()$ |
| Alternatives | a_1 | e_{11} | ... | e_{1j} | ... | e_{1n} |
| | a_2 | e_{21} | ... | e_{2j} | ... | e_{2n} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_i | e_{i1} | ... | e_{ij} | ... | e_{in} |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_m | e_{m1} | ... | e_{mj} | ... | e_{mn} |
| | | $v_1(C_1(.))$ | ... | $v_j(C_j(.))$ | ... | $v_n(C_n(.))$ |

Méthode MAVT

- **Etape 2** : Construire des fonctions de valeur partielle pour chaque critère.

| | Fonctions valeurs | | | | | |
|--------------|-------------------|--------------------|-----|--------------------|-----|--------------------|
| | | $v_1(C_1(.))$ | ... | $v_j(C_j(.))$ | ... | $v_n(C_n(.))$ |
| Alternatives | a_1 | $v_1(C_1(e_{11}))$ | ... | $v_j(C_j(e_{1j}))$ | ... | $v_n(C_n(e_{1n}))$ |
| | a_2 | $v_1(C_1(e_{21}))$ | ... | $v_j(C_j(e_{2j}))$ | ... | $v_n(C_n(e_{2n}))$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_i | $v_1(C_1(e_{i1}))$ | ... | $v_j(C_j(e_{ij}))$ | ... | $v_n(C_n(e_{in}))$ |
| | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| | a_m | $v_1(C_1(e_{m1}))$ | ... | $v_j(C_j(e_{mj}))$ | ... | $v_n(C_n(e_{mn}))$ |

- **Etape 3** : Établir les poids des critères.
- **Etape 4** : Calculer l'évaluation globale pour chaque action en utilisant une forme d'agrégation adéquate (additive, multiplicative, bilatérale ..). La meilleure action correspond à celle qui maximise la fonction valeur globale.

Méthode MAVT

La méthode MAVT est utilisée pour résoudre des problèmes en économie et en finance, mais elle présente plusieurs inconvénients:

- S'applique uniquement à un univers déterministe
- La construction des fonctions valeurs n'est pas toujours une tâche facile
- Evaluation sur une échelle cardinale des actions;
- La forme additive est généralement compensatoire et n'est donc utilisée que dans certaines situations;

⇒ La méthode MAUT permet de combler l'inconvénient de la méthode MAVT notamment en ce qui concerne l'environnement incertain.

Etapes de la méthode SMART

- **Etape 1** : Ordonner les critères selon l'ordre décroissant d'importance et déterminer le poids de chaque critère.
- **Etape 2** : Normaliser les coefficients d'importance relative.
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOUI.
- **Etape 3** : Mesurer la localisation de chaque action sur chaque critère $u_j(a_i)$. Les évaluations des actions se font sur une échelle variant de 0 et 100.

Etapes de la méthode SMART

- **Etape 4** : Déterminer la valeur de chaque action selon la somme pondérée suivante :

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$U(a_i) = \sum_{j=1}^n w_j \cdot u_j(a_i), \quad i \in \{1, \dots, m\}$$

- **Etape 5**: Classer les actions selon l'ordre décroissant de $U(a_i)$

Méthode SMART

Malgré qu'elle est facile à implémenter, la méthode SMART est sujette aux inconvénients suivants:

- Articulation a priori des préférences
- Evaluation sur une échelle cardinale des actions
- La méthode est compensatoire

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Méthode EVAMIX

La méthode EVAMIX traite les deux évaluations cardinales et ordinales à travers le calcul d'indices de dominances. La normalisation des indices et leur combinaison permet d'avoir de construire une mesure globale de la dominance. Les étapes de la méthode EVAMIX sont les suivantes:

- **Etape 1:** Calcul de deux matrices de dominances respectivement $\Pi = \{\pi_{i,j}\}_{i,j}$ et $\Gamma = \{\gamma_{i,j}\}_{i,j}$ des critères cardinaux (C) et des critères ordinaux (O)

(Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.)

$$\begin{cases} \pi_{ik} = \sum_{j \in O} \left\{ w_j * \text{dom}(e_{ij}, e_{kj}) \right\} \\ \gamma_{ik} = \sum_{j \in C} \left\{ w_j * \text{dom}(e_{ij}, e_{kj}) \right\} \end{cases}$$

où

$$\text{dom}(e_{ij}, e_{kj}) = \begin{cases} 1, & \text{si } e_{ij} > e_{kj} \\ 0, & \text{si } e_{ij} = e_{kj} \\ -1, & \text{si } e_{ij} < e_{kj} \end{cases}$$

Etapes de la méthode EVAMIX

- **Etape 2:** Construire les deux matrices normalisées des matrices Π et Γ , i.e, les matrices des éléments suivants:

$$\tilde{\pi}_{ik} = \frac{\pi_{ik}}{\sum_j \sum_l |\pi_{jl}|}$$

$$\tilde{\gamma}_{ik} = \frac{\gamma_{ik}}{\sum_j \sum_l |\gamma_{jl}|}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Etape 3:** Calcul de la matrice de dominance globale:

$$D_{ik} = \tilde{\pi}_{ik} \sum_{j \in O} w_j + \tilde{\gamma}_{ik} \sum_{j \in C} w_j$$

- **Etape 4:** Calcul le vecteur du score global S_i :

$$S_i = \sum_{k=1}^n D_{ik}$$

Exemple d'application 2

Une entreprise cherche un partenaire pour la fabrication de son produit. Le directeur opte pour les critères suivant:

| Critère de sélection | Sens d'optimisation | Ordre d'importance |
|----------------------|---------------------|--------------------|
| Coût du contrat (C1) | Minimiser | 40 |
| Licenciement (C2) | Minimiser | 250 |
| Qualité (C3) | Maximiser | 150 |
| Proximité (C4) | Maximiser | 10 |

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Le directeur a reçu cinq offres:

| Sous-traitant | Coût (C1) | Licenciement (C2) | Qualité (C3) | Proximité (C4) |
|---------------|-----------|-------------------|--------------|----------------|
| a1 | 40 | 100 | Insuffisante | Très loin |
| a2 | 100 | 140 | Très bonne | Très proche |
| a3 | 60 | 40 | Bonne | Proche |
| a4 | 60 | 40 | Moyenne | Loin |
| a5 | 70 | 80 | Bonne | Très proche |

Exemple d'application 2: Solution par la méthode SMART

■ Etape 1: Ordre décroissant des critères:

C2 avec poids 250 > C3 avec poids 150 > C1 avec poids 40 > C4 avec poids 10

■ Etape 2: Normalisation des coefficients d'importance:

C2 avec coef 55.6 % > C3 avec coef 33.3 % > C1 avec coef 8.9% > C4 avec coef 2.2 %

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

■ Etape 3: Evaluation des alternatives sur chaque critère: Pour les couts et le licenciement on a des valeurs numériques. Pour la l'évaluation de la qualité et la proximité respectivement on adopte:

- Très bonne, Très proche: 100 %
- Bonne, Proche : 66 %
- Moyenne, Loin : 33 %
- Insuffisante, Très loin: 0 %

Les matrice d'évaluation des alternatives:

Exemple d'application 2: Solution par la méthode SMART

■ Etape 3 :

$$R = \begin{bmatrix} 100 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \\ 66.67 & 100 & 66 & 66 \\ 66.67 & 100 & 33 & 33 \\ 50 & 60 & 66 & 100 \end{bmatrix}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

■ Etape 4 :

| | (C1) | (C2) | (C3) | (C4) | U(ai) |
|-------|-------|--------|--------|------|-------|
| Poids | 8.9 % | 55.6 % | 33.3 % | 2.2% | |
| a1 | 100 | 40 | 0 | 0 | 31.1 |
| a2 | 0 | 0 | 100 | 100 | 35.5 |
| a3 | 66.67 | 100 | 66 | 66 | 85 |
| a4 | 66.67 | 100 | 33 | 33 | 73.3 |
| a5 | 50 | 60 | 66 | 100 | 62 |

■ Etape 5: $\Rightarrow a_3$ sera sélectionné.

Approche de surclassement de synthèse

- **Idée:** Comparer puis Agréger
- **Etape 1:** Construire les relations de surclassement entre les alternatives suivant chaque critère.
- **Etape 2:** Agrégation de ces relations de surclassement pour traiter la problématique considérée.

Méthode PROMETHEE

Les méthodes PROMETHEE consistent au choix pour chaque critère d'une fonction de préférence à valeur dans $[0,1]$ utilisée pour comparer les actions entre elles. On obtient donc une relation P_i de préférence pour chaque critère i . Ensuite, l'étape de l'agrégation de ces relations de préférence permet d'obtenir une comparaison entre a et b par agrégation des critères. Le calcul des flux positifs et négatifs permet de trier les actions.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Etape 1:** On se fixe un ensemble fini d'alternatives noté A et un ensemble fini de critères à optimiser. On détermine pour chaque critère, une courbe avec les paramètres associés pour quantifier la relation de préférence entre deux actions a et b suivant chaque critère. Autrement dit, on cherche:

$$\forall a, b \in A, \pi_k(a, b) = P_k(C_k(a) - C_k(b))$$

Méthode de PROMETHEE

1- Critère vrai:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(a) > C_i(b) \\ 0 & \text{si } C_i(a) \leq C_i(b) \end{cases}$$

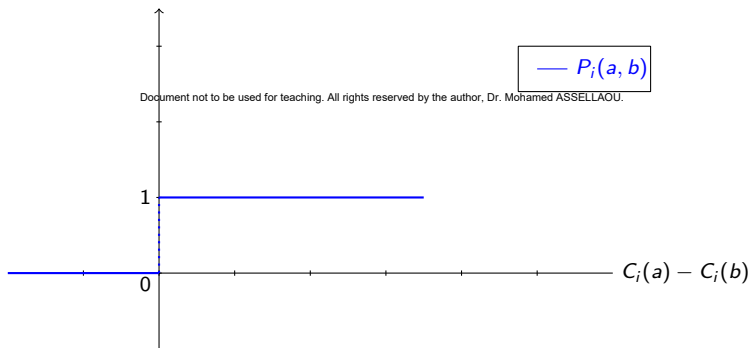


Figure: Vrai-critère.

Méthode de PROMETHEE

2- Quasi-critère:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) > q_i \\ 0 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) \leq q_i \end{cases}$$

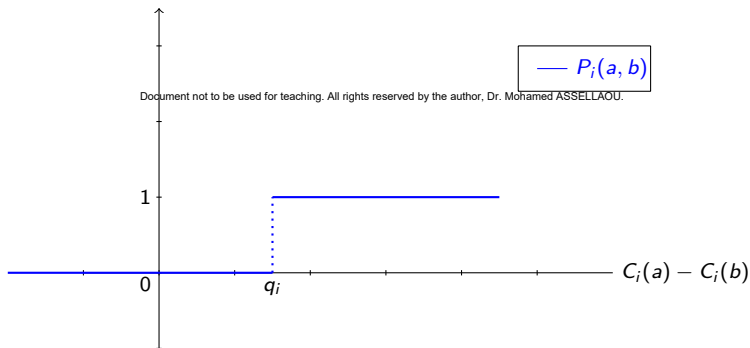


Figure: Quasi-critère.

Méthode de PROMETHEE

3- Pré-critère:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) > p_i \\ \frac{C_i(a) - C_i(b)}{p_i} & \text{si } 0 \leq C_i(a) - C_i(b) \leq p_i \\ 0 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) < 0 \end{cases}$$

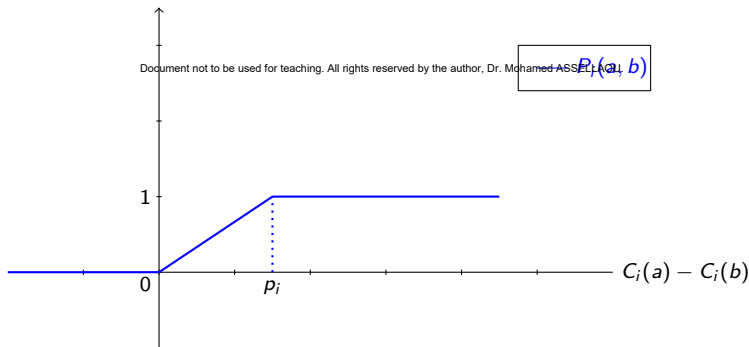


Figure: Pré-critère.

Méthode de PROMETHEE

4- Pseudo-critère 1:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) > p_i \\ \frac{1}{2} & \text{si } q_i \leq C_i(a) - C_i(b) \leq p_i \\ 0 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) \leq q_i \end{cases}$$

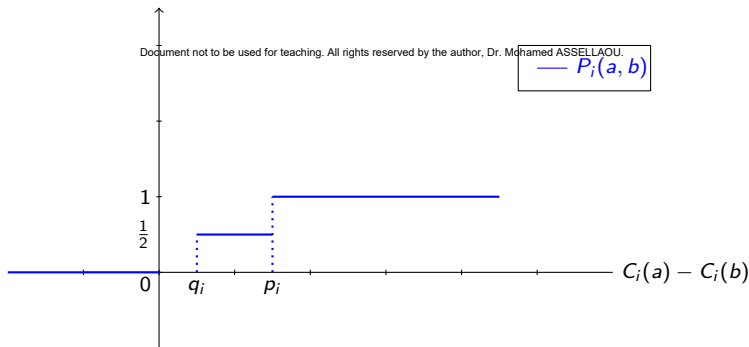


Figure: Pseudo-critère 1.

Méthode de PROMETHEE

5- Pseudo-critère 2:

$$P_i(a, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) > p_i \\ \frac{C_i(a) - C_i(b) - q_i}{p_i - q_i} & \text{si } q_i \leq C_i(a) - C_i(b) \leq p_i \\ 0 & \text{si } C_i(a) - C_i(b) \leq q_i \end{cases}$$

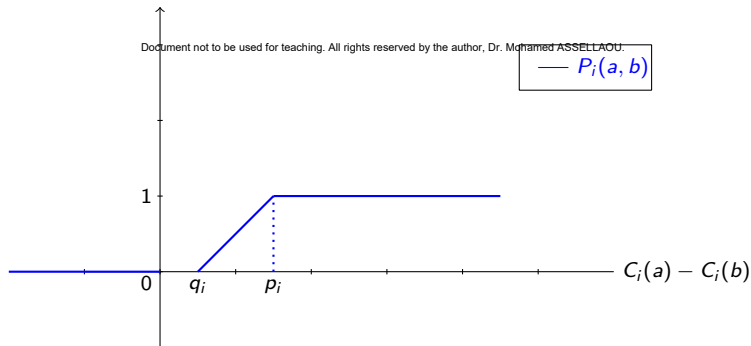


Figure: Pseudo-critère 2.

Méthode de PROMETHEE

6- Critère gaussien:

$$P_i(a, b) = 1 - \exp\left(\frac{C_i(a) - C_i(b)}{-2\sigma^2}\right)$$

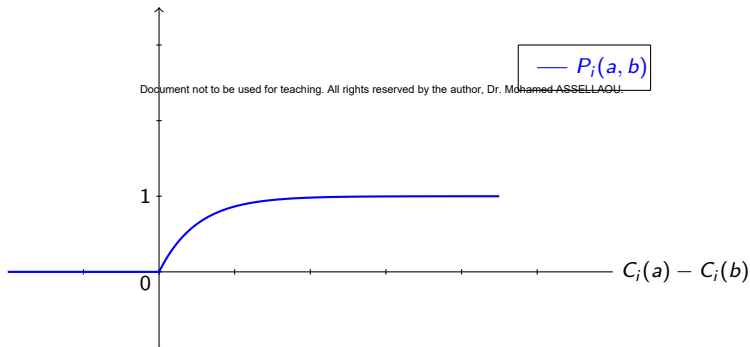


Figure: Critère gaussien.

Etapes de la méthode PROMETHEE

- **Etape 2:** Construire la matrice de préférence globale (degré de surclassement) par agrégation des critères:

$$\Pi = \left(\pi(a_i, a_k) = \sum_{j=1}^n W_j \times \pi_j(a_i, a_k) \right)_{i,k}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **Etape 3:** Calcul des flux sortant et entrant:

$$\begin{aligned}\phi^+(a_i) &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(a_i, b) \\ \phi^-(a_i) &= \frac{1}{n-1} \sum_{b \in A} \pi(b, a_i)\end{aligned}$$

Etapes de la méthode PROMETHEE

- **PROMETHEE I**: Les alternatives sont triées de cette manière:

$$a_i P a_j \Leftrightarrow (\phi^+(a_i) > \phi^+(a_j)) \wedge (\phi^-(a_i) \leq \phi^-(a_j))$$

$$\Leftrightarrow (\phi^+(a_i) \geq \phi^+(a_j)) \wedge (\phi^-(a_i) < \phi^-(a_j))$$

$$a_i I a_j \Leftrightarrow (\phi^+(a_i) = \phi^+(a_j)) \wedge (\phi^-(a_i) = \phi^-(a_j))$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- **PROMETHEE II**: Les alternatives sont triées en se basant sur la différence des flux entrant et sortant i.e

$$\phi(a_i) = \phi^+(a_i) - \phi^-(a_i):$$

$$a_i P a_j \Leftrightarrow \phi(a_i) > \phi(a_j)$$

$$a_i I a_j \Leftrightarrow \phi(a_i) = \phi(a_j)$$

Exemple d'application

| | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 | C_5 | C_6 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 80.0 | 90.0 | 6.0 | 5.5 | 8.0 | 5.0 |
| a_2 | 65.0 | 58.0 | 2.0 | 9.7 | 1.0 | 1.0 |
| a_3 | 83.0 | 60.0 | 4.0 | 7.2 | 4.0 | 7.0 |
| a_4 | 40.0 | 80.0 | 10.0 | 7.5 | 7.0 | 10.0 |
| a_5 | 52.0 | 72.0 | 6.0 | 2.0 | 3.0 | 8.0 |
| a_6 | 94.0 | 96.0 | 7.0 | 3.6 | 5.0 | 6.0 |

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELMOU.

Les critères doivent être optimiser de cette manière:

$$C_1 : \min \mid C_2 : \max \mid C_3 : \min \mid C_4 : \min \mid C_5 : \min \mid C_6 : \max$$

Les courbes de chaque critère avec leurs paramètres sont donnés comme suit:

$$C_1 : (2, q = 10)$$

$$C_2 : (3, p = 30)$$

$$C_3 : (5, [q = 0.5, p = 4.5])$$

$$C_4 : (4, [q = 1.0, p = 5.0])$$

$$C_5 : (1,)$$

$$C_6 : (6, \sigma = 5)$$

Méthode ELECTRE I

- L'idée de cette méthode est d'obtenir un sous ensemble ou un noyau N de l'ensemble des alternatives tel que tout alternative qui n'est pas dans N est surclassée par au moins une alternative dans N .
Autrement dit:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$\text{Trouver } N \subset A \text{ tel que} \quad \begin{aligned} &\forall b \notin N, \exists a \in N, a S b \\ &\forall b \in N, \forall a \in N, a R b \end{aligned}$$

- N ne représente pas l'ensemble des actions préférées mais plutôt l'ensemble le meilleur compromis qui peut être trouvé.

Méthode ELECTRE I

- **Indice de concordance** ou principe de majorité : Mesure la concordance de la majorité des critères avec la relation de surclassement d'une alternative a par rapport à b .

$$COR(a, b) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j} \sum_{C_j(a) \geq C_j(b)} w_j$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author Dr. Mohamed ASSELLAOUI.

- **Indice de discordance** ou principe de respect des minorités: Mesure si la discordance des critères non-concordants est très importante pour réfuter la relation de surclassement de a par rapport à b :

$$DIS(a, b) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall j, C_j(a) \geq C_j(b) \\ \frac{\max_j (C_j(b) - C_j(a))}{\max_{k, e, f} (C_k(e) - C_k(f))} & \text{sinon} \end{cases}$$

Méthode ELECTRE I

- Définition de la relation de surclassement une alternative a surclasse une alternative b si la concordance de a par rapport à b est supérieur à un seuil \hat{c} et la discordance est inférieur à un seuil \hat{d} :

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$a S b \Leftrightarrow \begin{cases} c(a, b) \geq \hat{c} \\ d(c, b) \leq \hat{d} \end{cases}$$

- L'ensemble N recherché est le noyau d'un graphe où les noeuds sont les alternatives et les arcs sont les relations de surclassement

Exemple d'application

| | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 | C_5 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 10.0 | 20.0 | 5.0 | 10.0 | 16.0 |
| a_2 | 0.0 | 5.0 | 5.0 | 16.0 | 10.0 |
| a_3 | 0.0 | 10.0 | 0.0 | 16.0 | 7.0 |
| a_4 | 20.0 | 5.0 | 10.0 | 10.0 | 13.0 |
| a_5 | 20.0 | 10.0 | 15.0 | 10.0 | 13.0 |
| a_6 | 20.0 | 10.0 | 20.0 | 13.0 | 13.0 |

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELAOU.

Les critères sont tous à **maximiser**; et le vecteur de poids des critères est:

$$W = [3, 2, 3, 1, 1]$$

ELECTRE II

- ELECTRE II permet de classer les options de la meilleure au pire, plutôt que de construire un noyau. Il donne un ordre complet des options non surclassées, contrairement à ELECTRE I qui fournit un ordre partiel de l'ensemble non surclassé.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Comme pour ELECTRE I, l'option a est préférée à l'option b si et seulement si les conditions de concordance et de discordance sont satisfaites.
- Contrairement à ELECTRE I, cet approche utilise deux relations distinctes - une forte relation des surclassement S_F , et une relation faible de surclassement S_f .

ELECTRE II

- En vue de définir S_F et S_f , on considère les niveaux décroissants de concordance suivants c^+ , c^0 and c^- tels que $0 \leq c^- \leq c^0 \leq c^+ \leq 1$. On définit également les niveau de discordance suivants: d_1 et d_2 tel que $0 \leq d_2 \leq d_1 \leq 1$.

- Surclassement fort: $a S_F b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} c(a, b) \geq c^+ \\ C_i(a) - C_i(b) \leq d_1 \\ \frac{\sum_{C_j(a) \geq C_j(b)} w_j}{\sum_{C_j(b) \geq C_j(a)} w_j} \geq 1 \quad \forall i \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} c(a, b) \geq c^0 \\ C_i(a) - C_i(b) \leq d_2 \\ \frac{\sum_{C_j(a) \geq C_j(b)} w_j}{\sum_{C_j(b) \geq C_j(a)} w_j} \geq 1 \end{array} \right. \quad \forall i$$

- Surclassement faible: $a S_f b$

$$\left\{ \begin{array}{l} c(a, b) \geq c^- \\ C_i(a) - C_i(b) \leq d_1 \\ \frac{\sum_{C_j(a) \geq C_j(b)} w_j}{\sum_{C_j(b) \geq C_j(a)} w_j} \geq 1 \end{array} \right.$$

Algorithme itératif ELECTRE II

- A partir des relations fortes et faibles de surclassement, on peut construire les graphes de surclassement faible et fortes. Ces graphes constituent la matière première d'un algorithme itérative qui permet de trouver les solutions.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- Avant de commencer l'algorithme il convient de réduire tout circuit observé en un seul point. Les options qui forment le même circuit sont considérées du même classement.
- Il s'agit d'un algorithme qui permet de construire deux types de classement et puis de considérer un compromis (un classement final).

Algorithme itératif ELECTRE II

- Cet algorithme est un processus itératif. A chaque étape k , les options déjà classés sont supprimées du graphe de surclassement fort.
- On détermine les meilleures options de l'étape k qui recevront le classement $k + 1$ on va les noter A_k .
Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.
- Toutes les options qui ne sont pas fortement surclassées vont former l'ensemble D_k .
- Les options dans D_k qui sont liées les unes aux autres par un faible surclassement vont constituer l'ensemble U_k .
- On cherche finalement l'ensemble B_k qui comprend toutes les options de U_k qui ne sont pas faiblement surclassées par aucune autre option de U_k .

Algorithme ELECTRE II

- Pour une étape k donnée, l'option obtenue ou le groupe d'options de même rang est défini par $(D_k - U_k) \cup B_k$.
- L'ensemble $D_k - U_k$ représente toutes les options qui::
 - 1 n'ont pas encore été classées et ne sont pas surclassées par aucune autre option du graphe de l'étape k
 - 2 ne sont pas liés par une faible relation de surclassement.
- L'ensemble B_k représente toutes les options qui satisfont aux conditions (1) et qui surclassent faiblement les autres options satisfaisant aux conditions (1).
- Toutes les options classées dans l'étape k se voient attribuer le classement $k + 1$. Ces même options classées à l'étape k seront supprimées du graphe de surclassement fort de l'étape suivante $k + 1$.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author Dr. Mohamed AGSELIAGUI

Algorithme itératif ELECTRE II

- L'algorithme itératif précédent permet de classer les options selon un classement direct qu'on notera V_1 .
- Le même algorithme sera utilisé pour obtenir un classement inverse V_2 avec les modifications suivantes:

Document is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- 1** Inverser la direction des graphes de surclassement fort et faible.
- 2** le classement des graphes obtenue noté $r'_{2(k+1)}$ après avoir inverser la direction des graphes est ajusté via la relation suivante:

$$r_{2(k+1)} = 1 + r'_{\max} - r'_{2(k+1)}$$

Algorithme ELECTRE II

- Le système de construction du classement final est le suivant:
 - si a est préférée à b dans les deux classement direct et inverse, alors ce sera également le cas pour le classement final.
 - si a a un rang équivalent à b dans l'un des classement, mais est préférée à b dans l'autre, alors a sera préférée à b ;
 - si a est préférée à b dans le classement direct complète, mais b est préféré à a ensuite, alors les deux options sont incomparables.

Exemple d'application 1: ELECTRE II

- On considère l'exemple illustrant de la procédure de classement ELECTRE II. Supposons que les relations de surclassement fort et faible sont obtenues après avoir utilisé ELECTRE I pour trouver les matrices de concordance et de discordance:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author. Dr. Mohamed ASSELAOU

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1 | — | | S_F | | S_f | S_F | S_f |
| 2 | S_F | — | S_f | S_f | | S_F | |
| 3 | | | — | | S_f | S_F | S_f |
| 4 | S_F | | S_F | — | S_F | S_F | S_f |
| 5 | | | | | — | | |
| 6 | S_F | | | | S_f | — | S_f |
| 7 | | | | | S_F | | — |

Table: Table de surclassement fort et faible des alternatives 1 à 7

Exemple d'application 1: ELECTRE II

- On considère les graphes correspondant aux surclassement direct et inverse sont:

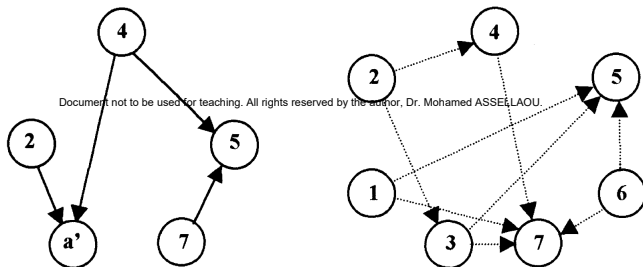


Figure: Graphe de surclassement fort à gauche (trait continu) et graphe de surclassement faible à droite (trait discontinu)

Exemple d'application 1: ELECTRE II

□ Classement direct:

1 Etape 0: $D_0 = \{2, 4, 7\}$, $U_0 = \{2, 4, 7\}$, $B_0 = \{2\}$, donc $A_0 = \{2\}$ et son rang est $r_{1(1)} = 1$.

2 Etape 1: $D_1 = \{4, 7\}$, $U_1 = \{4, 7\}$, $B_1 = \{4\}$, donc $A_1 = \{4\}$ et son rang est 2.

3 Etape 2: $D_2 = \{1, 3, 6, 7\}$, $U_2 = \{1, 3, 6, 7\}$, $B_2 = \{1, 3, 6\}$, donc $A_2 = \{1, 3, 6\}$ et son rang est 3.

4 Etape 3: $D_3 = \{7\}$, $U_3 = \emptyset$, $B_3 = \{7\}$, donc $A_3 = \{7\}$ et son rang est 4.

5 Etape 4: $A_4 = \{5\}$ et son rang est 5.

Exemple d'application 1: ELECTRE II

□ Classement inverse:

1 Etape 0: $D_0 = \{1, 3, 5, 6\}$, $U_0 = \{1, 3, 5, 6\}$, $B_0 = \{5\}$, donc $A_0 = \{5\}$ et son rang est 1.

2 Etape 1: $D_1 = \{1, 3, 6, 7\}$, $U_1 = \{1, 3, 6, 7\}$, $B_1 = \{7\}$, donc $A_1 = \{7\}$ et son rang est 2.

3 Etape 2: $D_2 = \{1, 3, 6\}$, $U_2 = \emptyset$, $B_2 = \emptyset$, donc $A_2 = \{1, 3, 6\}$ et son rang est 3.

4 Etape 3: $D_3 = \{2, 4\}$, $U_3 = \{2, 4\}$, $B_3 = \{4\}$, donc $A_3 = \{4\}$ et son rang est 4.

5 Etape 4: $A_4 = \{2\}$ et son rang est 5.

Exemple d'application 1: ELECTRE II

□ Le classement ajusté inverse est:

1 $A_0 = \{5\}$ et son rang est 5.

2 $A_1 = \{7\}$ et son rang est 4.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

3 $A_2 = \{1, 3, 6\}$ et son rang est 3.

4 $A_3 = \{4\}$ et son rang est 2.

5 $A_4 = \{2\}$ et son rang est 1.

□ Le classement final est le suivant: **1** : $\{2\}$; **2** : $\{4\}$; **3** : $\{1, 3, 6\}$;
4 : $\{7\}$; **5** : $\{5\}$.

Exemple 2 ELECTRE II

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|-------|
| 1 | 0 | S_F | S_F | S_F | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | S_F | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 0 | S_F | S_F | S_F | 0 | S_F | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | S_f | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | S_f | S_f | S_f | S_f | S_f | 0 | 0 | S_f |
| 8 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

Tracer les deux graphes de surclassement fort et faible. En déduire les classements direct et inverse et le classement final des alternatives.

ELECTRE TRI

- ELECTRE TRI permet de trouver des solutions à des problèmes de tri (affectation des actions à des catégories ou classes prédéfinies).
- Les alternatives ne sont pas comparées entre elles mais elles sont comparées à des références (frontières de k classes prédéfinies).
- Une alternative surclasse une frontière d'une classe prédéfinie lorsqu'elle est aussi bonne que cette frontière sur tous les critères et n'est pas mauvaise sur la majorité des critères.

Etapes ELECTRE TRI

- **Etape 1:** évaluation des indices de concordance (b_k sont les frontières des classes prédéfinies $k \leq n$):

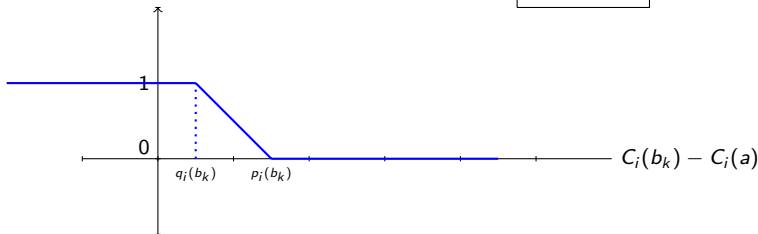
$$P_i(a, b_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(b_k) - C_i(a) \leq q_i(b_k) \\ \frac{p_i(b_k) - (C_i(b_k) - C_i(a))}{p_i(b_k) - q_i(b_k)} & \text{si } q_i(b_k) \leq C_i(b_k) - C_i(a) \leq p_i(b_k) \\ 0 & \text{si } C_i(b_k) - C_i(a) > p_i(b_k) \end{cases}$$

- **Etape 2:** Calcul de l'indice de concordance global:

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

$$c(a, b) = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j} \sum_{j=1}^n w_j P_j(a, b)$$

$\text{--- } P_i(a, b)$

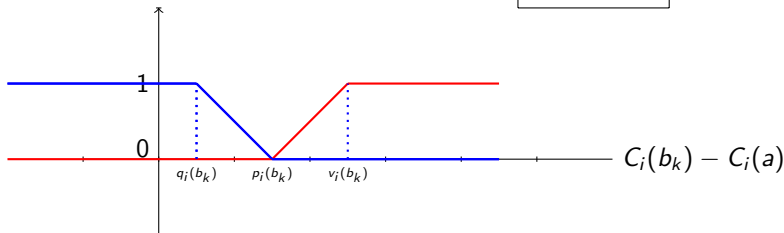


ELECTRE TRI

□ Etape 3:

$$d_i(a, b_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_i(b_k) - C_i(a) > v_i(b_k) \\ \frac{C_i(b_k) - C_i(a) - p_i(b_k)}{v_i(b_k) - p_i(b_k)} & \text{si } p_i(b_k) \leq C_i(b_k) - C_i(a) \leq v_i(b_k) \\ 0 & \text{si } C_i(b_k) - C_i(a) \leq p_i(b_k) \end{cases}$$

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELAAOU



ELECTRE TRI

- **Etape 4** Calcul de l'indice de crédibilité et définition des relations de surclassement

$$\sigma(a, b_k) = c(a, b_k) \prod_{\{j: d_j(a, b_k) \geq c(a, b_k)\}} \left(\frac{1 - d_j(a, b_k)}{1 - c(a, b_k)} \right)$$

La relation de surclassement définie se base sur l'indice de crédibilité $\sigma(a, b_k)$ et l'indice de coupe λ (le paramètre qui détermine la situation de préférence entre a et b_k) tel que :

- $\sigma(a, b_k) \geq \lambda$ et $\sigma(b_k, a) \geq \lambda \Rightarrow a S b_k$ et $b_k S a \Rightarrow a I b_k$.
- $\sigma(a, b_k) \geq \lambda$ et $\sigma(b_k, a) < \lambda \Rightarrow a S b_k$ et (non $b_k S a$) $\Rightarrow a S b_k$
- $\sigma(a, b_k) < \lambda$ et $\sigma(b_k, a) \geq \lambda \Rightarrow$ (non $a S b_k$) et $b_k S a \Rightarrow b_k S a$.
- $\sigma(a, b_k) < \lambda$ et $\sigma(b_k, a) < \lambda \Rightarrow$ (non $a S b_k$) et (non $b_k S a$) $\Rightarrow a R b_k$

ELECTRE TRI

□ **Etape 5:** Deux procédures d'affectation qui se présentent:

1 Procédure pessimiste (classement du meilleur au pire)

- Comparer successivement a à b_l , où $l = p - 1, p - 2, \dots, 0$.

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

- b_k est le premier profil tel que aSb_k .
- Affecter a à la classe ou la catégorie $k + 1$

2 Procédure optimiste (classement du pire au meilleur)

- Comparer successivement a à b_l , où $l = 1, 2, \dots, p$.
- b_k est le premier profil tel que b_kSa .
- Affecter a à la classe ou la catégorie k

Exemple d'application: ELECTRE TRI

On cherche à classer un ensemble d'actions $\{a_i\}_{i \leq 5}$, dont les performances sont récapitulées au tableau suivant selon les critères $\{C_i\}_{i \leq 5}$.

| Tronçons | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 | C_5 |
|----------|-------|--------|--------|--------|---------|
| a_1 | 2.63 | 5.26 | 52.63 | 84.21 | 26.32 |
| a_2 | 0 | 0 | 492.31 | 492.31 | 0 |
| a_3 | 0 | 10.13 | 20.25 | 20.25 | 405.06 |
| a_4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| a_5 | 0 | 210.53 | 280.7 | 280.7 | 1171.93 |

Table: Evaluation des critères, tableau de performances

Exemple d'application: ELECTRE TRI

Trois classes sont prédéfinies: "Etat Bon ", "Etat Moyen" et " Etat Mauvais " où

- b_1 est la frontière entre la classe "Etat Bon" et la classe "Etat Moyen"
- b_2 est la frontière entre la classe "Etat Moyen" et la classe " Etat Mauvais"

Les valeurs des seuils et poids des critères sont définis dans le tableau ci dessous:
(indice de coupe $\lambda = 0.76$.)

Document not to be used for teaching. All rights reserved by the author, Dr. Mohamed ASSELLAOU.

| | C_1 | C_2 | C_3 | C_4 | C_5 |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $C_j(b_1)$ | 0.5 | 2.23 | 37.53 | 37.96 | 40.67 |
| $C_j(b_2)$ | 7 | 29 | 126.7 | 128 | 300 |
| $q_j(b_i)$ | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 | 0.5 |
| $p_j(b_i)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $v_j(b_i)$ | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 |
| w_j | 0.1 | 0.35 | 0.1 | 0.1 | 0.35 |

Table: Définition des seuils et poids des critères